

卫星转动惯量测量方法

吴 斌 马贵贤 彭敏燕 郑 琦

(西北工业大学航天学院, 西安 710072)

摘 要 介绍了用扭摆, 通过倾斜安装测量卫星三个方向转动惯量的一种方法。分析了 I_y 测量准确度和测量倾斜角大小、 I_y/I_x 的比值、倾斜角误差之间的关系。当倾斜角度 $\theta > 45^\circ$ 时, I_y 能够达到较高的测量准确度。

关键词 人造卫星 惯量矩 + 惯性积 + 惯性主轴

A Measurement Method of Moment of Inertia for the Artificial Satellite

WU Bin MA Gui-xian PENG Min-Yan ZHENG Qi

(College of Astronautics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072)

Abstract Introduces a measurement method of moment of inertia for the artificial satellite through mounting the satellite with the angle of inclination. The measurement accuracy for the moment of inertia which related with the ratio between I_y and I_x and the sloping angle are analyzed and conclusion is indicated that higher accuracy is achievable when the sloping angle greater than 45° .

Key words Artificial satellite Moment of inertia Product of inertia Principle axis

1 引 言

目前, 测量大型试件的转动惯量主要采用扭摆法, 根据测量平台的支撑方式不同, 分为气浮支撑方式^[4]和机械轴承支撑方式^[1]。采用气浮支撑的优点是摆动过程中摩擦力小, 由阻尼引起的摆动周期误差可以忽略不计, 其测量误差为 $\pm 0.1\%$ 。而采用机械轴承支撑结构简单、维护方便, 可以通过分段标定等方法提高其准确度, 消除由于机械轴承阻尼造成的误差, 测量误差为 $\pm 0.3\%$ 。

测量转动惯量时, 测量轴必须和试件转轴平行。但卫星只能通过花盆安装在测量台上, 并且卫星质量很大, 一般达 $(2\ 000 \sim 5\ 000)\text{ kg}$ 不能将 Y 轴和 Z 轴水平放置, 只能通过倾斜一角度, 测量卫星对倾斜

轴的惯性张量, 通过一定的坐标转化计算出卫星的 I_y 和 I_z 。

2 测量原理与误差分析

2.1 转动惯量测量方法

转动惯量可通过测量扭摆系统的自由摆动周期来计算。扭摆系统如图 1 所示。如不考虑系统阻尼, 则^[1]

$$T = 2\pi \sqrt{I/K} \quad (1)$$

式中: I ——试件对 F 轴的转动惯量, $\text{kg} \cdot \text{m}^2$; K ——扭杆刚度系数, $\text{N} \cdot \text{m}/\text{rad}$; T ——系统自由摆动周期, s 。

已知扭杆的刚度系数, 测量其摆动周期, 可得试

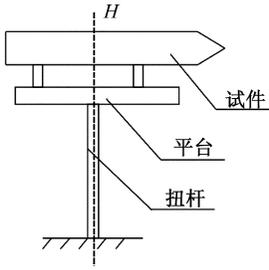


图 1 扭摆系统示意图

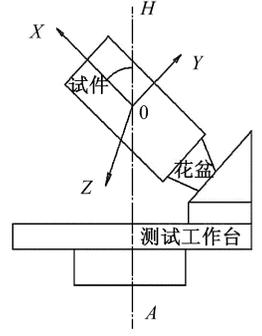
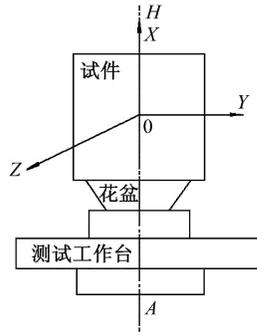


图 3 卫星竖直安装示意图 图 4 卫星倾斜安装示意图

件的转动惯量为

$$I = K\dot{\varphi}^2 / 4\pi^2 \quad (2)$$

2.2 卫星转动惯量测量

设 OXYZ 为卫星坐标系, 卫星质心与原点 O 重合, OH 轴是测量台转轴, 始终为垂直方向, 如图 2 所示, 则卫星绕轴 OH 的转动惯量为^[3]

$$I_H = I_X \cos^2 \alpha + I_Y \cos^2 \beta + I_Z \cos^2 \gamma - 2 I_{XY} \cos \alpha \cos \beta - 2 I_{YZ} \cos \beta \cos \gamma - 2 I_{ZX} \cos \alpha \cos \gamma \quad (3)$$

式中: α β γ ——分别为转动轴 OH 与卫星坐标轴 OX OY OZ 的夹角; I_X I_Y I_Z 和 I_{XY} I_{YZ} I_{ZX} ——分别为卫星对坐标轴的三个转动惯量和三个惯性积。

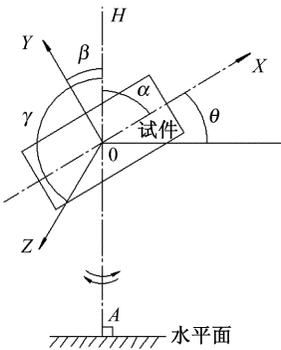


图 2 坐标轴与测量轴 AH 的夹角

根据卫星安装特点, 使卫星 OX 轴和测量台 OH 轴重合, 安装示意如图 3 所示, 可以直接测量 I_X 。将卫星倾斜一角度 θ 并且滑台在测量台上移动, 保证卫星质心位置在测量轴上, 倾斜时卫星安装示意如图 4 所示。

滑台绕 OX 轴分别转动 0° , 90° , 180° , 270° , 测量其转动惯量。设四种状态下卫星绕轴 OH 的转动惯量测量值为 $I_{H1} \sim I_{H4}$, 各测量状态的空间角度如表 1 所示。

表 1 四种转动惯量测量状态表

测量状态	转动惯量	α	β	γ
1	I_{H1}	θ	$90^\circ - \theta$	90°
2	I_{H2}	θ	90°	$90^\circ - \theta$
3	I_{H3}	θ	$90^\circ + \theta$	90°
4	I_{H4}	θ	90°	$90^\circ + \theta$

将表 1 的各坐标轴夹角代入式 (4), 可得

$$\begin{aligned} I_{H1} &= I_X \cos^2 \theta + I_Y \sin^2 \theta - 2 I_{XY} \cos \theta \sin \theta \\ I_{H2} &= I_X \cos^2 \theta + I_Z \sin^2 \theta - 2 I_{XZ} \cos \theta \sin \theta \\ I_{H3} &= I_X \cos^2 \theta + I_Y \sin^2 \theta + 2 I_{XY} \cos^2 \theta \sin \theta \\ I_{H4} &= I_X \cos^2 \theta + I_Z \sin^2 \theta + 2 I_{XZ} \cos^2 \theta \sin \theta \end{aligned} \quad (4)$$

由式 (4) 可得卫星绕自身坐标轴的转动惯量 I_Y I_Z

$$I_Y = \frac{I_{H1} + I_{H3} - 2 I_X \cos^2 \theta}{2 \sin^2 \theta} \quad (5)$$

$$I_Z = \frac{I_{H2} + I_{H4} - 2 I_X \cos^2 \theta}{2 \sin^2 \theta} \quad (6)$$

2.3 测量误差分析

根据误差传递理论^[3]求得 I_Y 的测量绝对误差为

$$\begin{aligned} \epsilon(I_Y) &= \sqrt{\left[\frac{\partial I_Y}{\partial I_{H1}} \epsilon(I_{H1}) \right]^2 + \left[\frac{\partial I_Y}{\partial I_{H3}} \epsilon(I_{H3}) \right]^2 + \left[\frac{\partial I_Y}{\partial I_X} \epsilon(I_X) \right]^2 + \left[\frac{\partial I_Y}{\partial \theta} \epsilon(\theta) \right]^2} \\ &= \sqrt{\left[\frac{1}{2 \sin^2 \theta} \epsilon(I_{H1}) \right]^2 + \left[\frac{1}{2 \sin^2 \theta} \epsilon(I_{H3}) \right]^2 + (c \theta \epsilon(I_X))^2 + \left[c \theta \left(2 I_X (1 + c \theta \theta) - \frac{1}{\sin^2 \theta} (I_{H1} + I_{H3}) \right) \epsilon(\theta) \right]^2} \end{aligned} \quad (7)$$

式中: $\epsilon(I_x)$, $\epsilon(I_y)$, $\epsilon(I_z)$ ——分别为 I_x , I_y , I_z 的误差; $\epsilon(\theta)$ ——倾斜角 θ 的测量误差, 它和倾角测量、传感器及安装轴线误差有关。

由式 (7) 可以看出, 转动惯量 I_y 测量的误差与测量台的转动惯量测量准确度、倾斜角 θ 的测量准确度、倾斜角的大小有关。

I_z 测量误差形式和式 (7) 相同, 不再列出。

3 算例分析

设试件转动惯量的理论值 $I_x = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, $I_y = 1200 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, $I_z = 0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$; 测量倾斜角 $\theta = 30^\circ$ 。并设系统转动惯量测量相对误差为 $\pm 0.3\%$, 倾斜角测量误差 $\epsilon(\theta) = 20''$ 。则 I 测量误差为

$$\epsilon(I) = 0.3\% I_x = 3.00 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

由式 (4) 计算可得 $I_y = I_z = 1050 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, 则 $\epsilon(I_y) = \epsilon(I_z) = 3.15 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$

将以上计算结果代入转动惯量误差计算公式 (7) 可得

$$\epsilon(I_y) = 13.06 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

I_y 测量的相对误差为 $\epsilon = \epsilon(I_y) / I_y$ 计算可得 $\epsilon = 1.08\%$ 。

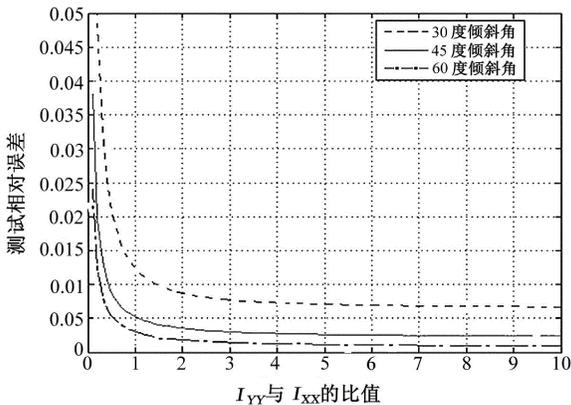


图 5 不同倾斜角下 I_y 相对误差与 I_y / I_x 之间的关系

I_y 测量的相对误差不仅和倾斜角有关, 还和 I_y / I_x 的比值有关, 三者之间的关系如图 5 所示。从图 5 中可以看出:

(1) 在相同的倾斜角下, I_y 测量相对误差随 I_y / I_x 值的增大而减小。当 I_y / I_x 值小于 1 时, 测量误差随着 I_y / I_x 比值的减小急剧增大, 因此, 为了得到较高的测量准确度, 要求 I_y / I_x 值不小于 1。当 I_y / I_x 比值大于 3 后, 测量相对误差变化不大, 趋近于一固定值;

(2) 在 $0^\circ \sim 90^\circ$ 范围内, 测量倾斜角越大, I_y 测

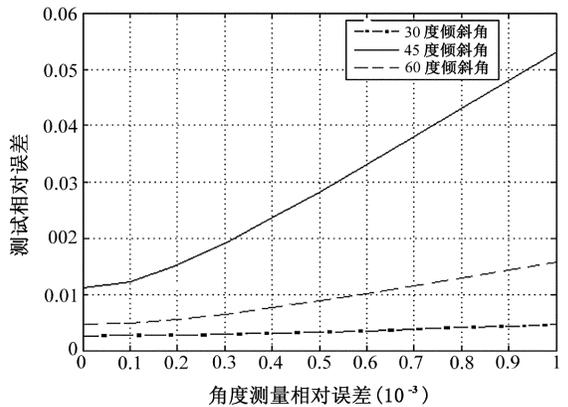


图 6 角度测量相对误差对测量准确度的影响

量相对误差越小。当倾斜角 $\theta = 90^\circ$ 时, 相当于卫星水平安装, 相对误差为 0.3% 。当 $\theta = 30^\circ$, $I_y / I_x \approx 1$ 时, 相对误差小于 1% , 当 $\theta = 45^\circ$, $I_y / I_x \approx 1$ 时, 相对误差小于 0.5% ;

(3) $\epsilon(\theta)$ 对测量相对误差的影响随着测量倾斜角的增大而减小, 如图 5 所示。倾斜角 θ 在 30° 时, 倾斜角相对误差增大对测量相对误差影响较大, 在 $45^\circ \sim 60^\circ$ 时, 对测量相对误差影响较小。

4 结束语

(1) 一般情况下卫星的 I_y / I_x 值均大于 1。因此, 当测量倾斜角为 $30^\circ \sim 45^\circ$ 时, I_y 测量的相对误差小于 1% , 当测量倾斜角大于 45° 时, I_y 测量的相对误差小于 0.5% ;

(2) 倾斜角在 30° 时, 角度测量相对误差小于 0.01% 时, I_y 测量的相对误差小于 1% 。实际应用中考虑机械变形等因素的影响, 角度测量相对误差取 0.1% , 因此只有当 $\theta > 30^\circ$, I_y 测量的相对误差小于 1% ;

(3) 工程中, 综合考虑安装支架的承载能力, 测量倾斜角受支架变形造成的角度测量误差等因素的影响, 选择倾斜角 $\theta > 45^\circ$ 时, 可以得到较高的测量准确度。

参考文献

- [1] 吴斌. 用扭摆测量导弹惯性积的方法[J]. 上海航天, 2000 (2).
- [2] 吴斌, 杨全洁. 用扭摆法测量导弹惯性积的误差分析[J]. 弹箭与制导学报, 2005 (4).
- [3] 费业泰. 误差理论与数据处理[M]. 北京, 机械工业出版社, 2002.
- [4] Richard Boynton. A New High Accuracy Instrument for Measuring Moment of Inertia and Centre of Gravity[M]. SAWE Paper No 1827 1988.