

# 摩擦阻力矩对卧式扭摆法测量弹箭极转动惯量精度的影响

汤海亮<sup>1,2</sup> 温晶晶<sup>2</sup> 邓 聘<sup>2</sup> 吴 斌<sup>2</sup>

(1.西安导引科技有限责任公司 陕西 西安 710065;2.西北工业大学 航天学院 陕西 西安 710072)

**摘 要:** 针对摩擦阻力矩对卧式扭摆法测量弹箭极转动惯量精度的影响,对测量方法进行了修正。给出了摩擦阻力矩的计算方法,对摩擦阻力矩进行了近似常数化处理,推导出考虑摩擦阻力矩影响的扭摆系统运动微分方程,在此基础上分析了摩擦阻力矩对摆动周期、摆动次数、系统静平衡位置的影响。通过对运动微分方程进行数值求解,定性分析了光电传感器位于两静平衡位置之间不同位置时周期测量的变化趋势,进而优化了光电传感器的安装位置。算例结果表明,摩擦阻力矩对弹箭极转动惯量测量精度的影响不可忽略,采用该文修正方法可将卧式扭摆法对弹箭极转动惯量的测量误差降低一个数量级。

**关键词:** 弹箭;极转动惯量;卧式扭摆法;摩擦阻力矩

中图分类号: TJ760.6 文章编号: 1005-9830(2017)05-0569-05

DOI: 10.14177/j.cnki.32-1397n.2017.41.05.005

## Effect of friction resistance moment on measurement accuracy of polar moment of inertia of projectile by torsion pendulum method

Tang Hailiang<sup>1,2</sup>, Wen Jingjing<sup>2</sup>, Deng Dan<sup>2</sup>, Wu Bin<sup>2</sup>

(1.Xi'an Guide Technology Co LTD ,Xi'an 710065 ,China;

2.School of Astronautics ,Northwestern Polytechnical University ,Xi'an 710072 ,China)

**Abstract:** In view of the effect of the friction resistance moment on the measurement accuracy of polar moment of inertia of projectiles by the torsion pendulum method ,the measurement method is modified. The calculation method and the approximate constant processing of the friction resistance moment are given in details ,then the motion differential equation is deduced in consideration of the effect of the friction resistance moment. Then the influences of the friction resistance moment on the pendulum period ,the pendulum count and the static equilibrium position are analyzed. By presenting the numerical solution of the motion differential equation ,the qualitative analysis of trend of the measurement period is conducted when the photoelectric sensor is located at different positions between the two static equilibrium positions ,and

收稿日期: 2016-07-26 修回日期: 2016-11-27

作者简介: 汤海亮(1989-),男,硕士生,主要研究方向:飞行器设计、质量特性测试设备研制,E-mail:455161105@qq.com;通讯作者:吴斌(1965-),男,博士,副教授,主要研究方向:飞行器设计、质量特性测试设备研制,E-mail:1915321940@qq.com。

引文格式: 汤海亮,温晶晶,邓聘,等.摩擦阻力矩对卧式扭摆法测量弹箭极转动惯量精度的影响[J].南京理工大学学报,2017,41(5):569-573.

投稿网址: <http://zrxuebao.njust.edu.cn>

the installation location of the photoelectric sensor is optimized. The calculation result of example shows that the effect of the friction resistance moment on the measurement accuracy of the polar moment of inertia of projectiles by the torsion pendulum method can not be ignored and its measurement error decreases by one order magnitude when using the method in this paper.

**Key words:** projectiles; polar moment of inertia; torsion pendulum method; friction resistance moment

为实现弹箭等飞行器的精确控制,有必要对其转动惯量进行精确测量。对于细长结构的弹箭,大多采用卧式扭摆法测量其极转动惯量(弹体相对于自身轴线的转动惯量<sup>[1]</sup>)。为提高弹箭极转动惯量的测量精度,国内外学者做了大量研究。侯文<sup>[2]</sup>给出提高测量精度的主要方法:减小阻力、修正动力学模型、改进传感器及电子线路、对测量精度进行校准等,其中后两种方法对测量精度的提高贡献不大;唐文彦等<sup>[3]</sup>、Richard Boynton 等<sup>[4]</sup>采用气浮轴承技术克服摩擦阻力,以提高扭摆测量精度,但这种方法对环境要求高,造价昂贵,且目前气浮轴承技术大多应用于立式扭摆法测量,考虑到弹箭竖直装夹的难度和危险性,该方法并不适用;张心明等<sup>[5]</sup>考虑了质偏对卧式扭摆法测量极转动惯量的影响,将传统的扭摆自由振动方程修正为扭摆-复摆混合型方程,提高了测量精度,但该方法没有考虑扭摆振动时待测弹箭支承装置产生的摩擦阻力矩的影响;李慧鹏等<sup>[6]</sup>提出了位移测量法,即利用位移传感器测出扭摆过程中的振幅变化曲线并进行离散点采样,将采样数据线性插值来计算扭摆周期,该方法受采样点数影响大,也受插值方法局限。

试验发现,卧式扭摆法测试过程中被测件直接由滚轮支承,扭摆时摩擦阻力矩的影响比较显著,不可忽视<sup>[1]</sup>。本文综合考虑摩擦阻力矩对卧式扭摆法测量精度的影响,建立了含摩擦阻力矩项的卧式扭摆法振动方程,并给出了计算方法。通过对方程解的分析,得到了光电传感器位于两静平衡位置之间不同位置时周期测量值的变化趋势,对光电传感器的安装及极转动惯量测量精度的提高有参考价值。

## 1 卧式扭摆法测量极转动惯量的原理

卧式扭摆法测量弹箭极转动惯量是通过测量扭摆的振动周期计算得到的,测量原理模型如图 1 所示,测试设备实物如图 2 所示。当弹箭绕

纵轴旋转一小角度后释放,忽略阻尼的影响,系统(弹箭和滚环)呈自由振动状态,根据对扭摆系统的理论分析,系统的极转动惯量  $J$  与扭摆周期  $T$  有如下关系<sup>[5]</sup>

$$J = \frac{K_c}{4\pi^2} T^2 \quad (1)$$

式中:  $K_c$  为扭摆系统刚度系数,实际试验时由标准件标定得到。

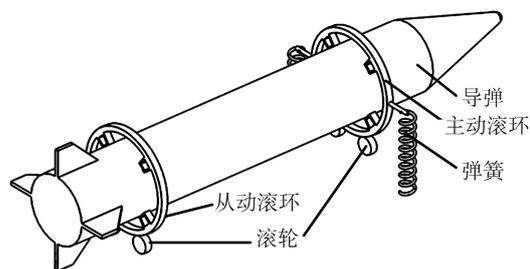


图 1 卧式扭摆法测量原理图

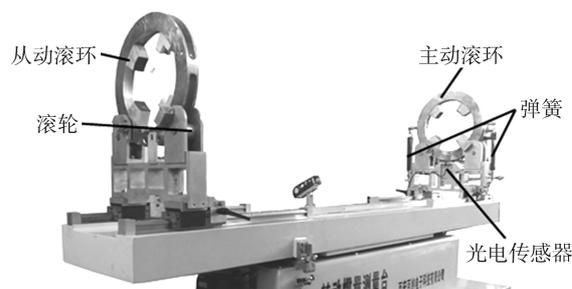


图 2 卧式扭摆法测量台实物图

从图 1、2 可以看出,卧式扭摆系统由主动滚环、从动滚环、弹簧、滚轮、光电传感器组成。由于主、从动滚环无机械连接,因此无法直接完成系统空载周期的测量,也就无法直接测得系统的空载极转动惯量,本文采用两个标准件标定的方法来完成测量任务。

设系统的空载极转动惯量为  $J_0$ ,标准件 1 的极转动惯量和实测周期分别为  $J_{S1}$ 、 $T_1$ ,标准件 2 的极转动惯量和实测周期分别为  $J_{S2}$ 、 $T_2$ ,被测件的极转动惯量和实测周期分别为  $J_d$ 、 $T_d$ 。

由式(1)得

$$\begin{cases} J_0 + J_{S1} = \frac{K_c}{4\pi^2} T_1^2 \\ J_0 + J_{S2} = \frac{K_c}{4\pi^2} T_2^2 \\ J_0 + J_d = \frac{K_c}{4\pi^2} T_d^2 \end{cases} \quad (2)$$

解式 (2) 得标定的扭摆刚度系数为:  $K_c = \frac{4\pi^2(J_{S1} - J_{S2})}{T_1^2 - T_2^2}$ ; 被测件的极转动惯量为:  $J_d = \frac{J_{S1} - J_{S2}}{T_1^2 - T_2^2} (T_d^2 - T_i^2) + J_{Si} \quad i=1, 2$  取平均得

$$J_d = \frac{J_{S1} - J_{S2}}{T_1^2 - T_2^2} \left( T_d^2 - \frac{T_1^2 + T_2^2}{2} \right) + \frac{J_{S1} + J_{S2}}{2} \quad (3)$$

## 2 考虑摩擦阻力矩影响的卧式扭摆系统

对于卧式扭摆法, 滚环与滚轮在扭摆过程中相互滚动必然会产生摩擦阻力矩。同时考虑到弹体、滚环的质量以及弹簧的预紧力会全部施加在滚轮上, 此时产生的摩擦阻力矩会很大, 因此对测量周期的影响不可忽略。重新建立弹体运动微分方程(小角度)为

$$J\ddot{\theta} + M \operatorname{sgn}(\dot{\theta}) + K_c \theta = 0 \quad (4)$$

式中:  $M \operatorname{sgn}(\dot{\theta})$  为摩擦阻力矩项, 其方向与角速度的方向始终相反。

如图 3 所示, 设实际测量过程中弹簧线性刚度为  $K$ , 自由长度为  $l$ , 预紧长度为  $x_1$ , 滚动部分(滚环和待测弹箭)重力为  $G$ , 滚环受两小滚轮的反作用力分别为  $N_1, N_2$ 。当发生角位移  $\theta$  时, 对应的弹簧拉伸长度为  $x_2$ , 两弹簧与竖直线所夹的锐角分别为  $\alpha_1, \alpha_2$ , 所受拉力分别为  $F_1, F_2$ ,  $\alpha$  为两小滚轮所夹圆心角的  $1/2$ , 对滚动部分进行受力分析并列平衡方程得

$$\begin{cases} -F_1 \sin \alpha_1 + N_1 \sin \alpha - N_2 \sin \alpha + F_2 \sin \alpha_2 = 0 \\ -F_1 \cos \alpha_1 + N_1 \cos \alpha + N_2 \cos \alpha - F_2 \cos \alpha_2 - G = 0 \end{cases} \quad (5)$$

解得

$$\begin{cases} N_1 = \frac{G + F_1 \cos \alpha_1 + F_2 \cos \alpha_2}{2 \cos \alpha} + \frac{F_1 \sin \alpha_1 - F_2 \sin \alpha_2}{2 \sin \alpha} \\ N_2 = \frac{G + F_1 \cos \alpha_1 + F_2 \cos \alpha_2}{2 \cos \alpha} - \frac{F_1 \sin \alpha_1 - F_2 \sin \alpha_2}{2 \sin \alpha} \end{cases} \quad (6)$$

当  $\theta$  较小时,  $\alpha_1, \alpha_2 \approx 0$ , 同时将  $F_1 = K(x_1 - x_2)$ ,  $F_2 = K(x_1 + x_2)$  代入式(6)得

$$N_1 \approx N_2 \approx \frac{G + 2Kx_1}{2 \cos \alpha} \quad (7)$$

将  $N_1, N_2$  代入滚动摩擦力矩计算公式  $M = N \cdot \mu_k \left( 1 + \frac{R_1}{R_2} \right)$  可得

$$M = \frac{G + 2Kx_1}{\cos \alpha} \cdot \mu_k \left( 1 + \frac{R_1}{R_2} \right) \quad (8)$$

式中:  $\mu_k$  为滚动摩擦系数, 一般取  $0.08 \sim 0.1$ <sup>[7]</sup>;  $R_1$  为滚环半径,  $R_2$  为滚轮半径。

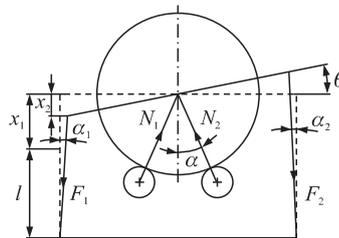


图 3 系统受力简图

考虑到实际试验过程中被测物所受重力远大于两弹簧拉力, 且弹簧拉力变化范围相对较小, 可以近似认为系统所受摩擦阻力矩为常数<sup>[8]</sup>。因此式(4)分解为

$$J\ddot{\theta} + K_c \theta = -M \quad (9)$$

与

$$J\ddot{\theta} + K_c \theta = M \quad (10)$$

式(9)、(10)的通解分别为

$$\theta(t) = A_1 \cos \omega_n t + A_2 \sin \omega_n t - \frac{M}{K_c} \quad (11)$$

与

$$\theta(t) = A_3 \cos \omega_n t + A_4 \sin \omega_n t + \frac{M}{K_c} \quad (12)$$

式中:  $\omega_n = \sqrt{K_c/J}$  是扭摆系统的固有频率;  $A_1, A_2, A_3, A_4$  为常数, 它们的大小可由对应的半个周期的初始条件来确定。式(11)和式(12)表明, 在每个半周期内运动都是简谐的, 只是对应的静平衡位置从  $M/K_c$  变为  $-M/K_c$ 。

当初始条件为  $\theta(t=0) = \theta_0, \dot{\theta}(t=0) = 0$  时, 系统(以图 3 为参考)顺时针摆动。因此, 代入式(12)可得

$$\theta(t) = \left( \theta_0 - \frac{M}{K_c} \right) \cos \omega_n t + \frac{M}{K_c} \quad 0 \leq t \leq \pi/\omega_n \quad (13)$$

将式(13)在  $t = \pi/\omega_n$  时刻的角位移、角速度作为初始条件, 代入式(11)可得

$$\theta(t) = \left( \theta_0 - \frac{3M}{K_c} \right) \cos \omega_n t - \frac{M}{K_c} \quad \pi/\omega_n \leq t \leq 2\pi/\omega_n \quad (14)$$

式(14)在  $t = 2\pi/\omega_n$  时刻的角位移、角速度又是第 3 个半周期的初始条件。如此反复计算,就可以得到式(4)的完整解析解  $\theta(t)$ ,从而求得第  $r$  个半周期结束时刻的角位移为  $(-1)^r(\theta_0 - 2rM/K_c)$ 。由此说明,在每个半周期内角位移大小的改变量为  $2M/K_c$ 。当第  $r$  个半周期内运动的振幅  $\theta_r \leq M/K_c$  时,扭转恢复力矩  $K_c\theta_r$  将小于摩擦力引起的扭矩  $M$ ,运动停止。因此,在扭摆终止前,发生的半周期的个数  $r$  为

$$\theta_0 - r \frac{2M}{K_c} \leq \frac{M}{K_c}$$

即

$$r \geq \frac{\theta_0 \frac{M}{K_c}}{\frac{2M}{K_c}} \quad (15)$$

绘制  $\theta(t)$  的图像如图 4 所示。由图 4 可见,考虑摩擦阻力矩的情况下,系统的运动微分方程是非线性的,但系统的固有摆动频率却不发生变化,其运动仍然是周期的。同时,系统的振幅是按线性规律减小的,在一个整周期内运动的振幅减小了  $4M/K_c$ ,所以振动曲线的包络线(即图 4 中的虚线)的斜率为  $-(4M/K_c)/(2\pi/\omega_n)$ 。

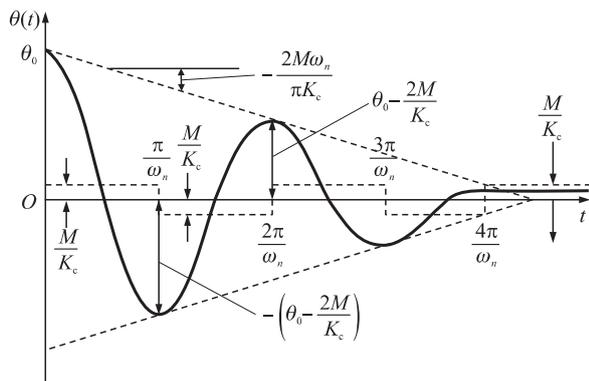


图 4 考虑摩擦阻尼的扭摆系统运动图像

### 3 周期测量分析

由图 4 可知,对于摩擦阻力矩主导的卧式扭摆系统,每个半周期的运动都是简谐运动,对应的静平衡位置正负交替变化且关于时间测量轴对称。

邹红玉等<sup>[9]</sup>指出,周期测量时光电传感器的最佳摆放位置是角速率最大的位置,即静平衡位置。由本文第 2 节的分析可以发现,由于静平衡位置与时间轴不重合,采用光电传感器测量扭摆曲线与时间轴的交点的方法来确定振动周期是不

可取的。

针对上面的问题,采用 Runge-Kutta 算法对摆动方程(4)进行数值求解(步长小于  $10^{-5}$ ),将求解出的曲线与时间轴的交点坐标提取出来,从中发现周期值逐渐增加,如表 1 所示。

表 1 周期序列变化

周期序号	1	2	3	4	5	6
周期值	0.703 2	0.703 3	0.703 5	0.703 8	0.704 1	0.704 7

由此可见,要得到精确的周期测量数据,应将光电传感器放置在系统的静平衡位置  $M/K_c$  或  $-M/K_c$  所对应的圆心角处,然后将测得的周期数据取平均值即可。此外,在不同加载情况下,摩擦阻力矩  $M$  的值是不同的。即使在同一测量过程中,空载、加载对应的摩擦阻力矩  $M$  的值也不同,从而导致不同工况下对应的光电传感器位置也需变化,这样才能满足精确测量的要求。所以,实际测量中采用 3 个光电传感器,分别安装在标准件 1、标准件 2、被测弹箭加载时对应的静平衡位置,采集各自对应的周期数据。标准件 1、标准件 2 对应的传感器位置固定,而被测弹箭对应的传感器位置应设计为可调节型。进一步,当测量位置从静平衡位置  $M/K_c$  移动到  $-M/K_c$  时,每个扭摆过程中周期序列值都是逐渐增加的,且所得到的一系列周期均值是变化的,时间轴上的周期均值最大,如图 5 所示。

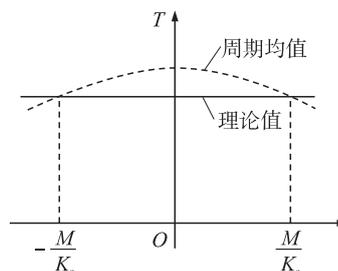


图 5 周期均值变化趋势

### 4 算例分析

在图 2 所示的卧式扭摆转动惯量测量设备上,用 3 个标准件 1、2、3 中的任意两个作为标构件,另一个作为被测件进行 3 轮测量。光电计时法测量时取前 4 个扭摆周期序列值的平均值作为测量值。每轮测量分为两种情况:(1)光电传感器位于各自的静平衡位置  $M/K_c$ ; (2)光电传感器位于时间轴处。测量结果见表 2。

表 2 标准件转动惯量测量结果

周期序号及测量结果	标准件 1		标准件 2		标准件 3	
	$M/K_c$	时间轴	$M/K_c$	时间轴	$M/K_c$	时间轴
1	0.138 19	0.138 20	0.248 61	0.248 94	0.359 11	0.359 11
2	0.138 21	0.138 21	0.248 62	0.249 11	0.359 09	0.360 44
3	0.138 16	0.138 23	0.248 62	0.249 43	0.359 11	0.362 02
4	0.138 20	0.138 23	0.248 61	0.250 24	0.359 12	0.369 57
$T_{\text{平均值}}/s$	0.138 19	0.138 22	0.248 62	0.249 43	0.359 18	0.362 99
$J_{\text{理论}}/(kg \cdot m^2)$	0.290 2		0.939 0		1.959 1	
$J_{\text{实测值}}/(kg \cdot m^2)$	0.290 56	0.306 66	0.938 78	0.928 84	1.959 67	1.985 65
误差 $\mu/\%$	0.124	5.672	-0.023	-1.082	0.029	1.355

从表 2 的测量数据可以看出,利用本文提出的测量位置测得的周期值几乎不变,而在扭摆曲线与时间轴的交点处测得的周期值逐渐增大。利用前者测得的周期值计算得到的极转动惯量的相对误差比后者的相对误差小了一个数量级,并且前者测得极转动惯量的相对误差均小于 0.2%。

## 5 结论

本文在考虑摩擦阻力矩的情况下对卧式扭摆法测量弹箭极转动惯量的原理做了详细分析和论述:(1)分析了摩擦阻力矩作用下扭摆系统周期的不变性及其对振动次数的影响,确定了扭摆系统的理论静平衡位置与系统所受摩擦阻力矩的关系,得出了系统不同加载情况下对应不同的静平衡位置的结论;(2)分析了测量位置变化对测得的周期数据的影响,为周期测量误差分析提供了理论依据,并根据静平衡位置对光电传感器安放位置进行了相应调整,以保证精确测量;(3)算例分析表明,光电传感器在静平衡位置处测得的周期数据比时间轴处测得的周期数据波动小,利用前者计算得到的被测件极转动惯量的相对误差比后者小一个数量级。并且在测量范围比较大的情况下,利用静平衡位置处测得的周期数据计算得到的被测件极转动惯量的误差均小于 0.2%。

本文工作为光电计时法精确测量弹箭极转动惯量提供了参考依据。关于时间轴处测得的周期序列值变大的原因,仍需进一步研究。

### 参考文献:

[1] 李宝峰.弹箭质量参数测试台设计研究[D].南京:南京理工大学机械工程学院,2006.  
 [2] 侯文.大型弹箭及航天器转动惯量测量方法研究[J].

中北大学学报,2008,29(6):505-509.  
 Hou Wen.Research on measurement method for moment of inertia of large-scale projectiles and spacecrafts [J]. Journal of North University of China,2008,29(6):505-509.  
 [3] 唐文彦,李慧鹏,张春富.扭摆法测量飞行体转动惯量[J].南京理工大学学报,2008,32(1):69-72.  
 Tang Wenyan, Li HuiPeng, Zhang Chunfu. Measurement of flight object's moment of inertia using torsion pendulum [J]. Journal of Nanjing University of Science and Technology, 2008, 32(1):69-72.  
 [4] Richard S Boynton, Daniel Otowski. A new high speed mass properties instrument [J]. SAWE Paper 3341, 2004.  
 [5] 张心明,郑英杰,迟占铎.质偏对卧式扭摆法测量弹体转动惯量精度的影响[J].兵工学报,2013,34(6):797-800.  
 Zhang Xinming, Zheng Yingjie, Chi Zhanduo. Effect of centroidal deviation on measurement of rotational inertia of projectile body by torsion pendulum method [J]. Acta Armamentarii, 2013, 34(6):797-800.  
 [6] 李慧鹏,唐文彦,张春富等.基于阻尼比实时算法的转动惯量测量研究[J].南京理工大学学报,2008,32(4):472-475.  
 Li HuiPeng, Tang Wenyan, Zhang Chunfu et al. Measurement of moment of inertia based on real-time computing damping ratio [J]. Journal of Nanjing University of Science and Technology, 2008, 32(4):472-475.  
 [7] 成大先.机械设计手册(第5版)[M].北京:化学工业出版社,2010.  
 [8] Singiresu S Rao.机械振动(第4版)[M].李欣业,张明路,译.北京:清华大学出版社,2014.  
 [9] 邹红玉,郑红平.扭摆法测量转动惯量实验中光电门摆放位置的探究[J].物理实验,2009,29(6):29-31.  
 Zou Hongyu, Zheng Hongping. Discussion on position of optical gate in rotational inertia experiment [J]. Physics Experimentation, 2009, 29(6):29-31.